Valores y vectores propios de una matriz

Juan-Miguel Gracia

Índice

B. Valores y vectores propios

Definiciones.- Dada una matriz cuadrada **A** de orden 3 se dice que el número λ_0 es un *valor propio* de **A** si existe un vector columna tridimensional **c** no nulo t.q.

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda_0 \, \mathbf{c}.$$

El vector **c** se llama *vector propio* de **A** asociado al valor propio λ_0.

Otras terminologías equivalentes

λ_0	$\mathbf{c}$
valor propio	vector propio
autovalor	autovector
valor característico	vector característico
eigenvalor	eigenvector

B. Método para hallar valores y vectores propios, 1

Por definición, un vector propio **c** debe ser un *vector columna* distinto de

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos λ_0 y **c** tales que

$$\lambda_0\, \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

Esta ecuación es equivalente a $\lambda_0\, \mathbf{I}_3 \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$, siendo $\mathbf{I}_3$ la matriz unidad de orden 3:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El vector $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ satisface $\lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{0}$ cualquiera que sea el número λ. Esta situación no interesa, pues cualquier número sería valor propio de **A**.

B. Método para hallar valores y vectores propios, ~~4~~ 2

La ecuación

$$\lambda_0 \, \mathbf{I}_3 \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}$$

es equivalente a

$$(\lambda_0 \, \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) \, \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{c}$ ha de ser distinto de cero, entonces necesariamente el determinante

$$|\lambda_0 \, \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}|$$

tiene que ser igual a 0. Una posible manera de hallar el λ_0 que buscamos es construir el polinomio en λ

$$p(\lambda) := |\lambda \, \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}| \qquad (1)$$

El polinomio $p(\lambda)$ en la variable λ es de grado 3 y se llama el *polinomio característico* de $\mathbf{A}$.

B. Método para hallar valores y vectores propios, ~~5~~ 3

Debemos resolver la ecuación en la incógnita λ

$$p(\lambda) := |\lambda\, \mathbf{I_3} - \mathbf{A}| = 0. \tag{2}$$

A continuación si λ_0 es una raíz de esta ecuación, se resuelve el sistema homogéneo indeterminado

$$(\lambda_0\, \mathbf{I_3} - \mathbf{A}) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

en las incógnitas c_1, c_2, c_3. Una solución $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ de (3) con no todas las componentes c_1, c_2, c_3 nulas, proporciona uno de los vectores buscados.

B. Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 1

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Vamos a hallar un valor propio y un vector propio asociado. Es preciso resolver la ecuación en λ

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \tag{5}$$

B. Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 2

Por la regla de ▸ Ruffini encontramos que $\lambda_0 = 1$ es una raíz de (5):

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

Para encontrar un vector propio $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ asociado a este $\lambda_0 = 1$,

resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B. Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 3

Escribimos este sistema en la forma

$$\left\{ \begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, tachamos la última ecuación:

$$\left\{ \begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

B. Ejemplo de cálculo de un valor y un vector propio, 4

Este sistema es equivalente al anterior. Pasamos c_3 al segundo miembro

$$\begin{cases} c_2 = 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 = -c_3 \end{cases}$$

Damos a c_3 un valor arbitrario; por ejemplo, $\boxed{c_3 = 1}$:

$$\begin{cases} c_2 = 4 \\ -3c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{c_2 = 4};$$

$$-3c_1 = c_2 - 1 = 4 - 1 = 3 \Longrightarrow \boxed{c_1 = -1}$$

Así pues, un vector propio asociado a $\lambda_0 = 1$ es

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B. Independencia lineal, 1

Definición 1

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vectores columna 3×1. Se dice que el sistema de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es *linealmente independiente* (l.i.) si para escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ la relación

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. El sistema $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ se dice *linealmente dependiente* (l.d.) si existen escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ no todos nulos tales que

$$\beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

Abuso de lenguaje

Es frecuente decir que los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ son linealmente independientes (en plural) cuando el sistema $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es linealmente independiente. El concepto de independencia lineal siempre se refiere a un sistema o conjunto de vectores. No existe el concepto de *vector linealmente independiente*. Así pues, un conjunto de vectores linealmente independientes no es la reunión de vectores, cada uno de los cuales sea linealmente independiente.

B. Independencia lineal, 2

A veces es práctico utilizar esta definición equivalente de independencia lineal: El sistema de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es l.i. si para escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ la relación

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}, \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.$$

Dados unos vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, se llama *combinación lineal* de estos vectores a todo vector $\mathbf{w}$ de la forma

$$\mathbf{w} := \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \alpha_3\mathbf{w}_3.$$

NB

Proposición 2

Un sistema de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es l.d. si y sólo si alguno de estos vectores es combinación lineal de los otros dos.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis existen escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ no todos cero t.q.

$$\beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \tag{6}$$

Sea, por ejemplo, $\beta_2 \neq 0$. De (6) se sigue que

$$\beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_3\mathbf{u}_3 = -\beta_2\mathbf{u}_2;$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2}\mathbf{u}_1 - \frac{\beta_3}{\beta_2}\mathbf{u}_3; \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u}_2 \text{ es combinación lineal de } \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}. \quad \blacksquare$$

NB. Independencia lineal, 3

Recíprocamente, si un vector, digamos $\mathbf{u}_1$, es combinación lineal de $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, entonces existen escalares α_2, α_3 t.q.

$$\mathbf{u}_1 = \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3.$$

Por tanto,

$$-\mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Esto significa que el sistema $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es l.d. pues el coeficiente de $\mathbf{u}_1$ en (7) es -1 (que es $\neq 0$).

□

Proposición 3

Si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ *son l.i. y*

$$\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{w}_3 = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2 + \beta_3 \mathbf{w}_3 \tag{8}$$

con $\alpha_i, \beta_1, i = 1, 2, 3$, *escalares, entonces*

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3.$$

COMENTARIO. La expresión de un vector como combinación lineal de un sistema de vectores l.i. es *única*.

NB. Independencia lineal, 4

DEMOSTRACIÓN. Por (8),

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{w}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{w}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}.$$

Como $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es l.i., esta relación implica que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0. \implies \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3.$$

□

Proposición 4

Si uno de los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es el vector $\mathbf{0}$, entonces este sistema es l.d.

DEMOSTRACIÓN. Como $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar λ, y $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{u}$, si fuese $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ se tendría que tomando un $\lambda_1 \neq 0$ (cualquiera):

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 = \alpha_1\mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \implies \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \text{ es l.i.}$$

Si el vector cero fuese $\mathbf{u}_2$ o $\mathbf{u}_3$, la demostración sería análoga.

□

NB. Notaciones de lógica.

Si $\mathcal{A}$ denota una aserción, por $\neg\mathcal{A}$ denotamos su negación. Por ejemplo si $\mathcal{A}$ es la aserción "Todos los hombres son malayos", su negación $\neg\mathcal{A}$ es "No todos los hombres son malayos"; es decir $\neg\mathcal{A}$ equivale a decir "Hay al menos un hombre que no es malayo".

Teorema directo: $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$

Teorema recíproco: $\mathcal{B} \implies \mathcal{A}$

Teorema contrarrecíproco $\neg\mathcal{B} \implies \neg\mathcal{A}$

Así pues,

$$(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{B} \implies \neg\mathcal{A})$$

NB. Independencia lineal, 5

La proposición contrarrecíproca de la Proposición 4 dice que la aserción siguiente es verdadera.

Proposición 5

Si un sistema de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ *es l.i., entonces ninguno de estos vectores puede ser el vector* $\mathbf{0}$.

B. Valores propios simples, 1

Supongamos que la matriz **A** de orden 3 tiene sus valores propios simples: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Esto quiere decir, que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son tres números distintos dos a dos. Es conocido que un polinomio de grado 3 puede tener: (1) o tres raíces simples; (2) o una raíz doble y una simple; (3) o una raíz triple.

Teorema 6

Sea **A** *una matriz cuadrada* 3×3 *y supongamos que todos sus valores propios* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *son simples. Sean* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *vectores propios de* **A** *asociados a* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*, respectivamente. Entonces*

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

es un sistema linealmente independiente.

NB. DEMOSTRACIÓN. Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son l.i., pues si existiese un escalar α tal que

$$\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1, \tag{9}$$

se tendría que $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{A}\mathbf{v}_1$; de donde $\lambda_2 \mathbf{v}_2 = \alpha \lambda_1 \mathbf{v}_1$. Multiplicando (9) por λ_2, $\lambda_2 \mathbf{v}_2 = \alpha \lambda_2 \mathbf{v}_1$. Lo que implica $\alpha \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \alpha \lambda_2 \mathbf{v}_1$. $\Longrightarrow$ $(\alpha\lambda_1 - \alpha\lambda_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $\Longrightarrow$ $\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se sigue que $\alpha = 0$. Pero, por (9), esto implicaría que $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; imposible ($\mathbf{v}_2$ vector propio); $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son l.i.

NB. Valores propios simples, 2

Sigamos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que el sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ fuera l.d. Entonces por la Proposición 2 alguno de estos vectores sería combinación lineal de los otros dos. Supongamos que $\mathbf{v}_3$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2. \tag{10}$$

Premultiplicando (10) por $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{v}_2$. Por tanto,

$$\lambda_3 \mathbf{v}_3 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2. \tag{11}$$

Multiplicando (10) por λ_3,

$$\lambda_3 \mathbf{v}_3 = \alpha_1 \lambda_3 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_3 \mathbf{v}_2. \tag{12}$$

Igualando los segundos miembros de (11) y (12) resulta

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \alpha_1 \lambda_3 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_3 \mathbf{v}_2.$$

Por la Proposición 3, se sigue

$$\alpha_1 \lambda_1 = \alpha_1 \lambda_3, \ \alpha_2 \lambda_2 = \alpha_2 \lambda_3. \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_3) = 0, \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_3$ y $\lambda_2 \neq \lambda_3$; $\Longrightarrow$ $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Por (10), $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$; imposible ($\mathbf{v}_3$ vector propio). $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}_3$ no es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son l.i. ■

B. Diagonalización de matrices

¿Para qué sirven los valores propios?

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, separando (desacoplando) sus variables. Ejemplos:

$$(1)\ \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t);\ \ (2)\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Sea $\mathbf{P} := [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$,

$$\mathbf{AP} = [\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \mathbf{A}\mathbf{v}_3] = [\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, \lambda_3\mathbf{v}_3] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{PD};$$

llamando

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Por ello,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}.$$

B

$$Ax = b \qquad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b$$

$$\downarrow$$

$$P^{-1}APP^{-1}x = P^{-1}b \qquad \text{pues} \quad PP^{-1} = I_3$$

$y := P^{-1}x$ (cambio de variables)

$c := P^{-1}b$

$$Dy = c$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 y_1 = c_1 \\ \lambda_2 y_2 = c_2 \\ \lambda_3 y_3 = c_3 \end{cases} \implies \begin{matrix} y_1 = c_1/\lambda_1 \\ y_2 = c_2/\lambda_2 \\ y_3 = c_3/\lambda_3 \end{matrix}$$

$$y = P^{-1}x \Rightarrow \boxed{Py = x} \qquad P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

solución de $Ax = b$

B

$$x'(t) = A x(t) + b(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = D$$

$$P^{-1} x'(t) = P^{-1} A x(t) + P^{-1} b(t)$$

$$P^{-1} x'(t) = \underbrace{P^{-1} A P}_{D} P^{-1} x(t) + P^{-1} b(t)$$

Cambio de variables $y(t) = P^{-1} x(t)$ $\qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$

$\Downarrow$ derivando respecto de t.

$y'(t) = P^{-1} x'(t)$; $\qquad c(t) = P^{-1} b(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$

$$y'(t) = D y(t) + c(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + c_1(t) \xrightarrow{\text{resuelvo}} y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) + c_2(t) \longrightarrow y_2(t) \\ y_3'(t) = \lambda_3 y_3(t) + c_3(t) \longrightarrow y_3(t) \end{cases} \longrightarrow \circledast$$

$\circledast$ (sigue)

$$P y(t) = x(t)$$

$$P \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Solución del sistema $x'(t) = A x(t) + b(t)$

Sistema de recurrencias lineales

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ v_n \end{pmatrix} ; \qquad A$$

$$u_{n+1} = A u_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad \Longrightarrow$$

$u_1 = A u_0$; $u_2 = A u_1 = A \cdot A u_0 = A^2 u_0$; $u_3 = A^3 u_0$; en general

$$u_n = A^n u_0 = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ valores iniciales

$(x_n)_{n=0}^{\infty}$

$(y_n)_{n=0}^{\infty}$

$(z_n)_{n=0}^{\infty}$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AI_3AP = P^{-1}A^2P$$

$$D^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow \boxed{PD^nP^{-1} = A^n}$$

$$u_n = PD^nP^{-1}u_0 = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} P^{-1}u_0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

B. Ejemplo de cálculo de valores propios, sigue

Sea **A** la matriz del ejemplo ◂ ejemplo. Ya hemos calculado uno de valores propios de **A** : $\lambda_1 = 1 (=: \lambda_0)$. Hallemos los dos que faltan λ_2, λ_3.
Utilizando la regla de Ruffini:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -4 \\ -3 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

	1	-2	-5	6
3		3	3	-6
	1	1	-2	0

$\Longrightarrow$ $\lambda_2 = 3$ es una raíz.

B. Ejemplo de cálculo de valores propios, sigue, 2

	1	-2	-5	6
-2		-2	8	-6
	1	-4	3	0

$\Longrightarrow$ $\lambda_3 = -2$ es una raíz.

B. Ejemplo de cálculo de valores propios, sigue, 3

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 1$ es una raíz. primer valor propio

B. Ejemplo de cálculo de valores propios, sigue, 4

De manera análoga al cálculo de un vector propio $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{c})$, asociado a $\lambda_1 = 1 (= \lambda_0)$, se pueden calcular vectores propios $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ asociados a $\lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$, respectivamente. Se deja como *ejercicio* el cálculo de estos dos vectores propios.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalización de la matriz A.

Sea $\mathbf{P} := [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7

Comprobar con cálculos que $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$. Lo que implicará $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$.